RECOPILACIÓN DE EJERCICIOS Y CUESTIONES DE RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO, DE EXÁMENES P.A.U. (PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD) CANARIAS, DESDE EL 2014 AL 2001, ADECUADOS PARA MATEMÁTICAS II DE 2º DE BACHILLERATO:

4 A JULIO 2014:

Sea P el punto de coordenadas $P(1,0,1)$ y r la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-2z \quad\ =1 \end{cases}$.

a) Hallar la ecuación en forma continua de una recta que pase por el punto P y sea paralela a la recta r. (1,25 puntos)

b) Hallar la ecuación general de un plano que pase por el punto P y contenga a la recta r. (1,25 puntos)

4 B JULIO 2014:

4.- Determinar la posición relativa de los siguientes planos:

$\beta_1 \equiv \begin{cases} x=-1+3\lambda-2\mu \\ y=4+\lambda \\ z=-2+2\lambda-5\mu \end{cases}$, $\beta_2 \equiv x+y+z=2$, $\beta_3 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (2,5 puntos)

4 A JUNIO 2014:

- Dados los puntos $A(-1,0,3), B(2,4,1)$ y $C(-4,3,1)$:

a) Estudiar si los puntos A, B y C están alineados. (1,25 puntos)

b) Hallar la ecuación de la recta paralela al segmento AB y que pasa por C. Expresarla como intersección de dos planos. (1,25 puntos)

4 B JUNIO 2014:

4.- Determinar el valor de a para que la recta r de ecuación $r \equiv \begin{cases} x-y+2z=2 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$ sea paralela al plano $\beta \equiv x-ay+10z=-3$. (2,5 puntos)

4 A JULIO 2013:

Dados el punto $P(2, 2, -2)$ y la recta:

$$r : \begin{cases} 2x + y + z & = -2 \\ x + 3y + z & = 0 \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación del plano π_1 que contiene a r y pasa por P.

b) Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene a P y es perpendicular a r.

4 B JULIO 2013:

Dadas las rectas:

$$r : \frac{x}{5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4} \qquad\qquad s : \begin{cases} x = & 2 + 3\lambda \\ y = & 2 \\ z = & -1 \end{cases}$$

a) Determinar la ecuación general del plano paralelo a las rectas r y s y que pasa por el origen de coordenadas. (1,5 puntos)

b) Hallar el ángulo que forman r y s. (1 punto)

4 A JUNIO 2013:

Dados la recta $r : \begin{cases} x - 2y + z & = 0 \\ -x + 2y + z & = 2 \end{cases}$ y el punto $P(1, 0, 1)$ exterior a r.

a) Hallar la ecuación en forma general del plano π que contiene a r y P. (1,25 puntos)

b) Hallar la ecuación (como intersección de dos planos) de la recta s que pasa por P y es paralela a la recta r. (1,25 puntos)

4 B JUNIO 2013:

Dada la recta:

$$r : \begin{cases} x - 2y + z & = 0 \\ x - z & = 0 \end{cases}$$

y los puntos $P(1, -2, 0)$ y $Q(0, 1, 3)$

a) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a PQ.

b) Hallar la ecuación de la recta s perpendicular a r que pasa por Q e intersecta a r.

4 A SEPT 2012:

4. Estudiar la posición relativa de las rectas $r: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z}{5}$ y $s: \begin{cases} 4x-2y+z=0 \\ 2x-y+z=5 \end{cases}$

(explicar el procedimiento utilizado).

4 B SEPT 2012:

4. Dado el plano $\pi: \begin{cases} x=-1+3\lambda-2\mu \\ y=4+\lambda \\ z=-2+2\lambda-5\mu \end{cases}$ $(\lambda \in R)$ $(\mu \in R)$ y dado el punto P (0 , 3 , -1) exterior a π,

obtener las ecuaciones en forma continua, en forma paramétrica y como intersección de dos planos, de la recta r que pasa por P y es perpendicular al plano π, explicando el procedimiento utilizado.

4 A JUNIO 2012:

4. Dadas las rectas secantes: $r_1: \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3-4\lambda \\ z=-2+3\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in R)$ y $r_2: \begin{cases} 5x-y+z=2 \\ -5x+y+z=0 \end{cases}$

obtener las ecuaciones en forma continua y en forma paramétrica de la recta s que pasa por el punto de intersección de las rectas dadas y es perpendicular a ambas, explicando el procedimiento utilizado.

4 B JUNIO 2012:

4. Dada la recta $r: \begin{cases} x=-1+3\lambda \\ y=-5\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in R)$ y dado el punto P (2 , -2 , 3) exterior a r,

a) Hallar la ecuación en forma general del plano π que los contiene, explicando el procedimiento utilizado. (1'5 puntos)

b) Obtener las ecuaciones en forma paramétrica, en forma continua y como intersección de dos planos, de la recta s que pasa por P y es perpendicular al plano π, explicando el procedimiento utilizado.

4 A SEPT 2011:

4.- Dados los puntos A(-1 , 2 , 0) y B(2 , 1 , -1)

a) Determinar si el punto C(5 , 0 , -2) está alineado con los anteriores, explicando el motivo (hacer un dibujo esquemático de la situación). (0'75 p.)

b) Hallar las ecuaciones de la recta que contiene a los puntos A y B, en forma continua, en forma paramétrica y como intersección de dos planos. (1'25 p.)

c) Hallar ecuación en forma general del plano que pasa por B y es perpendicular a la recta AB. (0'5 p.)

4 B SEPT 2011:

4.- Dados la recta $r: \begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$ y el punto P(-1 , 2 , 3)

Hallar ecuación en forma general del plano que los contiene.

4 A JUNIO 2011:

Dados la recta $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ y el punto P(1 , 2 , 3)

a) Hallar ecuación en forma general del plano que los contiene. (1 p.)

b) Hallar ecuaciones, en forma continua, en forma paramétrica y como intersección de dos planos, correspondientes a la recta que pasa por P y es perpendicular al plano anterior. (1'5 p.)

4 B JUNIO 2011:

Dadas las rectas secantes $r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{1}$ y $s: (x, y, z) = (1, -1, 0) + \lambda(-1, 6, 2)$

a) Calcular su punto de intersección. (1'75 p.)

b) Hallar ecuación del plano que las contiene. (0'75 p.)

4 A SEPT 2010 ESP:

Dados los puntos A (0, 5, 2) y B (1, 2, -1):

a) Averiguar si los puntos pertenecen a la recta r: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{2}$. (1 p.)

b) Determinar las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones como intersección de dos planos de la recta que pasa por los puntos A y B. (1'5 p.)

4 B SEPT 2010 ESP:

Dados los planos $\pi_1 : x + y - 3z = 1$ y $\pi_2 : 2x - 3y + z = 2$

a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a ambos planos que pasa por el origen de coordenadas. (1'5 p.)

b) Hallar el ángulo que forman los planos π_1 y π_2. (1 p.)

4 A SEPT 2010 GEN:

Dadas las siguientes rectas:

$$r: \ (x, y, z) = (-8, -4, 5) + \lambda(-2, 1, -2)$$

$$s: \begin{cases} 4y - 3x = 8 \\ 4z - 5x = 60 \end{cases}$$

a) Comprobar que se cortan en un punto y obtener sus coordenadas. (1'5 p.)

b) Hallar la ecuación de la recta paralela a s que pasa por el punto (1, 0, -1).

4 B SEPT 2010 GEN:

4.- Dada la recta $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = z+1$ y los puntos A (1 , 1 , 0) y B (2 , 0 , -3)

a) Hallar la ecuación general del plano que contiene a la recta r y al punto A. (1'25 p.)

b) Hallar el ángulo formado por la recta r y la recta que pasa por los puntos A y B. (1'25 p.)

4 A JUNIO 2010 GEN:

4.- Obtener la ecuación en forma general del plano que pasa por el punto (0, 3, 2) y es paralelo a las dos rectas siguientes:

$$r_1: \frac{x}{-1} = \frac{y+3}{2} = z+1 \qquad r_2: \begin{cases} x - z = 5 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases} \qquad (2'5 \text{ p.})$$

4 B JUNIO 2010 GEN:

Estudiar la posición relativa de los planos:

$$10x - y + 5z = 2 \;;\; 4x + 3y - z = 6 \;;\; -3x + 2y - 3z = 2.$$

4 A JUNIO 2010 ESP:

Dada la recta $r: \begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi: \; x - 3y - 2z = 0$.

a) Comprobar que se cortan en un punto y obtener sus coordenadas. (1'5 p.)
b) Determinar el ángulo que forman recta y plano. (1 p.)

4 B JUNIO 2010 ESP:

Dadas las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-2}$ y $s: \begin{cases} x = -\frac{2}{3} - 4t \\ y = \frac{5}{3} + t \\ z = 3t \end{cases}$

a) Estudiar la posición relativa de ambas rectas. (1'75 p.)
b) Hallar una recta que pasa por el origen de coordenadas y sea perpendicular a r y s. (0'75 p.)

4 A SEPT 2009:

Calcular ecuación del plano que contiene a la recta $r:\begin{cases} y=1+x \\ z=2 \end{cases}$ y es paralelo a la recta $s:\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=-2 \\ z=\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in R)$ **(2.5 puntos)**

4 B SEPT 2009:

Dado el plano $\pi: 3x-2y+z=5$ y la recta $r: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}=z+3$, hallar su posición relativa. Si se cortan en un punto, hallar sus coordenadas. Y si son paralelos, hallar el plano que contenga a r sea paralelo a π. **(2.5 puntos)**

4 A JUNIO 2009:

Dado el punto $P(5, 0, -1)$ exterior a la recta $r:\begin{cases} x=-\lambda \\ y=-4 \\ z=2+\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in R)$, hallar el plano que contenga a r y pase por P. **(2.5 puntos)**

4 B JUNIO 2009:

Estudiar la posición relativa de los 3 planos:

$$\pi_1: 2x-3y+z=2 \quad , \quad \pi_2: 3x-2y-z=7 \quad \text{y} \quad \pi_3: x+y-2z=5$$

En caso de que se corten en un punto, hallar éste. Y en caso de que se corten en una recta, determinarla.

4 A SEPT 2008:

4A. Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x+y-z+6=0$ con la recta $r \equiv \begin{cases} x-3y+6=0 \\ -x+3z+3=0 \end{cases}$ y es paralela a la recta $s \equiv \frac{x-2}{3}=\frac{y}{-1}=z$. **(2.5 puntos)**

4 B SEPT 2008:

4B. Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto P(-1, 0, 2) y contiene a la recta $s \equiv \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=z+2$. **(2.5 puntos)**

4 A JUNIO 2008:

Dadas las rectas $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z = -1 \end{cases}$ y $\mathbf{s} \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y - z - 5 = 0 \end{cases}$

i) Determinar su posición relativa. **(1.5 puntos)**
ii) En caso de cortarse, determinar el ángulo que forman y el punto de corte.

4 B JUNIO 2008:

4B. Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$, el plano $\pi \equiv 2x - 4y - 2z = 0$ y el punto P(1, 1, 1). Se pide:

i) Determinar la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto P y es paralelo al plano π. **(1.25 puntos)**

ii) Determinar la ecuación general del plano π_2 que contiene a la recta r y pasa por el punto P.

4 A SEPT 2007:

Dadas las rectas $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases}$ y $\mathbf{s} \equiv \dfrac{x-1}{-2} = y+1 = z-2$

a) Determinar su posición relativa. **(1 punto)**
b) En caso de cortarse, determinar el ángulo que forman y el punto de corte.

4 B SEPT 2007:

4. Determinar la ecuación general (implícita) del plano paralelo a las rectas $\mathbf{r} \equiv x=y+1=z$ y $\mathbf{s} \equiv \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$ y que pasa por el origen de coordenadas. **(2.5 puntos)**

4 A JUNIO 2007:

Dada la recta $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x+y-2=0$

a) Determinar su posición relativa. **(1 punto)**
b) En caso de cortarse, determinar el ángulo que forman y el punto de corte.

4 B JUNIO 2007:

a) Determinar si los puntos A (-1,0,3) , B (2,4,1) y C (-4,3,1) están alineados.
b) Expresar en dos formas diferentes la ecuación de la recta que pasa por A y B.

4 A SEPT 2006:

Estudiar la posición relativa de las rectas *r* y *s*. En caso de que se corten en un punto hallar las coordenadas del mismo.

$$r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1} \qquad , \qquad s \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda - 8 \\ z = -\lambda - 1 \end{cases}$$

4 B SEPT 2006:

4. Hallar la ecuación implícita del plano que pasa por el punto A(0,-1,0) y es paralelo a las rectas:

$$r = \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s = \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda - 3 \end{cases}$$

4 A JUNIO 2006:

a) Halla la ecuación del plano determinado por los puntos: A(1, 3, 2), B(2, 0, 1) y C(1, 4, 3).

b) Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda - 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = 2\lambda \end{cases}$ con respecto al plano anterior, hallando el punto de intersección en caso de que se corten.

4 B JUNIO 2006:

Estudiar la posición relativa de los siguientes planos según los valores del parámetro λ :

$$x + \lambda y + z - 4 = 0; \quad x + 3y + z - 5 = 0; \quad \lambda x + y + z - 4 = 0.$$

4 A SEPT 2005:

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$**, hallar la ecuación del plano que contiene a ésta y pasa por el punto P(0, -2, 1).**

4 B SEPT 2005:

4.- Estudiar la posición relativa del plano $\pi \equiv 5x + \lambda y - 2z + 1 = 0$

y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases}$ **según los valores del parámetro λ.**

4 A JUNIO 2005:

4.- a) Comprueba que las rectas:

$$r \equiv (x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(1, 0, -1)$$
$$s \equiv (x, y, z) = (0, 3, 1) + \mu(-2, 1, 3)$$

se cortan en un punto. ***(1 punto)***

b) Hallar la ecuación general del plano que contiene a las rectas dadas en el apartado anterior.

4 B JUNIO 2005:

a) Estudiar, según los valores del parámetro λ, la posición relativa de los planos:

$$\begin{cases} \lambda x - 2y + \lambda z = 0 \\ 10x - y + 5z = 0 \\ 4x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

(1,25 pun

b) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos (0, 1, 2), (1, 0, 3) y (2, -1, 0).

4 A SEPT 2004:

Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (2, -4, 0) y contiene a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 4 \\ -3x + z = -2 \end{cases}$$

4 B SEPT 2004:

Dados los planos de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax - 2z = 15 \\ 2x + y + z = -7 \\ x + y + az = -8a \end{cases}$$

Determinar los valores de a para que los tres planos pasen por una recta. Justificar.

4 A JUNIO 2004:

a) ¿Están alineados los puntos A(1, 0, -1), B(-1, 1, 2) y C(3, 0, 1)? Justificar la respuesta.
b) En caso afirmativo determinar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo determinar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos.

4 B JUNIO 2004:

Hallar la ecuación del plano que contiene al punto A (0, -2, 4) y a la recta de ecuación:

$$\frac{x+1}{2} = y-3 = \frac{z+2}{-2}$$

4 A SEPT 2003:

4.Dada la recta $r:\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ -x-2y+z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi:\ 2x+y+mz-3=0$, estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π según los valores del parámetro m, hallar también el punto de intersección de la recta r y el plano π en el caso de $m=1$.

4 B SEPT 2003:

4. Obtener la ecuación del plano paralelo a las dos rectas siguientes:

$$r_1:\ \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2};\ r_2:\begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ -x+y+3z=1 \end{cases}$$

y que pasa por el punto $(1,1,2)$.

4 A JUNIO 2003:

4. Se sospecha que el plano definido por el punto $(1,0,5)$ y los vectores $u=(3,1,1)$, $v=(-1,3,-2)$ se corta en un punto con la recta cuyas ecuaciones en forma continua son:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-7}{10} = \frac{z-2}{-5}$$

Decidir razonadamente la cuestión.

4 B JUNIO 2003:

4. Hallar la ecuación cartesiana de un plano que pasa por el punto $(3,0,3)$ y contiene a la recta cuyas ecuaciones son:

$$\frac{x}{-2} = y+1 = \frac{z-3}{3}$$

4 A SEPT 2002:

Decidir si el plano de ecuación cartesiana $x + y + z = 1$ también viene dado por las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{1}{2} - \lambda - \mu$$
$$y = \frac{1}{2} + \lambda - \mu$$
$$z = 2\mu$$

4 B SEPT 2002:

Calcular el valor de a para que los cuatro puntos siguientes estén en un mismo plano: (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) y (1, 1, a).

4 A JUNIO 2002:

4. En el espacio se consideran los puntos (1,2,-3), (3,-1,0) y (5,-4,3). Investigar si están alineados. En caso afirmativo, hallar las ecuaciones de la recta que los contiene. En caso negativo, calcular la ecuación del plano que definen.

4 B JUNIO 2002:

Obtener la ecuación del plano que contiene a las dos rectas siguientes:

$$r_1 \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z}{-2}\,;\; r_2 \equiv \{(x,y,z) = (-7,1,2) + \lambda(4,-1,0)\}.$$

4 A SEPT 2001:

4.- Discutir la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 2y + (m+1)z = 3 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv mx + 2y + 3z = 3$, en función del parámetro m.

4 B SEPT 2001:

Determinar las posiciones relativas de las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x + y = 4 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases},\quad s \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{3}.$$

4 A JUNIO 2001:

4.- Comprobar si los puntos (1,2,3), (1,-2,4) y (1,-3,5) están alineados. En caso negativo, determinar la ecuación del único plano que los contiene.

4 B JUNIO 2001:

En caso de que las dos rectas siguientes se corten en un punto, hallar las coordenadas del mismo:

$$r \equiv \begin{cases} x = -7 + 4\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 \end{cases},\quad s \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z}{-2}.$$