APLICACIONES DE LAS DERIVADAS.

1. Halla las rectas tangente y normal a las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=x^5-3x^4+x^2-2x+1$, en $x=1$.

b) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$, en $x=4$.

c) $f(x)=\ln[tg(2x)]$, en $x=\dfrac{\pi}{8}$.

d) $y=\sqrt{sen^3(5x)}$, en $x=\dfrac{\pi}{6}$.

Sol: a) $y+2=-7(x-1)$, $y+2=\dfrac{1}{7}(x-1)$; *b)* $y-\dfrac{4}{5}=\dfrac{9}{125}\cdot(x-4)$, $y-\dfrac{4}{5}=-\dfrac{125}{9}\cdot(x-4)$;

c) $y=4\cdot\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)$, $y=-\dfrac{1}{4}\cdot\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)$;

d) $y-\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{15\cdot\sqrt{6}}{8}\cdot\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$, $y-\dfrac{\sqrt{2}}{4}=-\dfrac{4\cdot\sqrt{6}}{45}\cdot\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

2. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la circunferencia $x^2+y^2+4x-2y-20=0$ en el punto de abscisa 1 y ordenada negativa.

Sol: $y+3=\dfrac{3}{4}\cdot(x-1)$, $y+3=-\dfrac{4}{3}(x-1)$.

3. Calcula las tangentes a la curva $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ que forman un ángulo de 45º con la parte positiva del eje de abscisas.

Sol: $y=x$, $y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=x-\sqrt{3}$, $y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=x+\sqrt{3}$.

4. Halla los coeficientes a, b, c de la función $y=ax^2+bx+c$, sabiendo que dos puntos de su gráfica son (2, 3) y (3, 13) y que la tangente a esa función en $x=1$ es paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

Sol: $a=3$, $b=-5$, $c=1$.

5. Estudia la monotonía y la curvatura de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=x^3-3x^2+1$ en los puntos $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$.

b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ en los puntos $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=0$, $x=\dfrac{1}{2}$, $x=2$.

c) $f(x)=\cos\ x-sen\ x$ en los puntos $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{3\pi}{4}$, $x=\pi$.

d) $f(x)=sen\ x\cdot\cos\ x$ en los puntos $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

Sol: a) $x=-1$*: creciente, cóncava;* $x=0$*: no creciente ni decreciente, cóncava;* $x=1$*: decreciente, no convexa ni cóncava;* $x=2$*: no creciente ni decreciente, convexa. b)* $x=-\frac{1}{2}$*: creciente, cóncava;* $x=0$*: no creciente ni decreciente, cóncava;* $x=\frac{1}{2}$*: decreciente, cóncava;* $x=2$*: decreciente, convexa. c)* $x=0$*: decreciente, cóncava;* $x=\frac{\pi}{4}$*: decreciente, no convexa ni cóncava;* $x=\frac{3\pi}{4}$*: no creciente ni decreciente, convexa;* $x=\pi$*: creciente, convexa. d)* $x=0$*: creciente, no convexa ni cóncava;* $x=\frac{\pi}{4}$*: no creciente ni decreciente, cóncava;* $x=\frac{\pi}{2}$*: decreciente, no convexa ni cóncava;* $x=\frac{3\pi}{4}$*: no creciente ni decreciente, convexa.*

6. Estudia la monotonía y la curvatura de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{1}{x}$

b) $f(x)=\frac{1}{x^2}$

c) $f(x)=\cot g\ x$

d) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

e) $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Sol: a) Decreciente en $(-\infty,\ 0)$ *;* $(0,\ +\infty)$*; convexa en* $(0,\ +\infty)$ *y cóncava en* $(-\infty,\ 0)$*.*
b) Creciente en $(-\infty,\ 0)$ *y decreciente en* $(0,\ +\infty)$*; convexa en* $(-\infty,\ 0)$ *;* $(0,\ +\infty)$*.*
c) Decreciente en $\mathbb{R}-\{n\cdot\pi\}$*, (*$n\in\mathbb{Z}$*); convexa en* $\left(n\cdot\pi,\ (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ *y cóncava en* $\left((2n+1)\cdot\frac{\pi}{2},\ (n+1)\cdot\pi\right)$*, (*$n\in\mathbb{Z}$*). d) Creciente en* $(0,\ +\infty)$ *y decreciente en* $(-\infty,\ 0)$*;convexa en* $\mathbb{R}$*. e) Creciente en* $\mathbb{R}$*; convexa en* $(0,\ +\infty)$ *y cóncava en* $(-\infty,\ 0)$*.*

7. Halla los extremos relativos (indicando cuáles son máximos y cuáles mínimos) y los puntos de inflexión de las funciones siguientes:

a) $f(x)=x^3-6x+12$

b) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

c) $f(x)=\cos\ x-\operatorname{sen}\ x$ en $[0,\ 2\pi)$

d) $f(x)=\operatorname{sen}\ x\cdot\cos\ x$ en $[0,\ 2\pi)$

e) $y=x^4+6x^3+12x^2+10x+8$

Sol: a) Máximo relativo en $x=-\sqrt{2}$*, mínimo relativo en* $x=\sqrt{2}$*, punto de inflexión en* $x=0$*.*

b) Máximo relativo en $x = 0$. *c) Máximos relativos en* $x = 0$ *y* $x = \frac{7\pi}{4}$, *mínimo relativo en* $x = \frac{3\pi}{4}$, *puntos de inflexión en* $x = \frac{\pi}{4}$ *y* $x = \frac{5\pi}{4}$. *d) Máximos relativos en* $x = \frac{\pi}{4}$ *y* $x = \frac{5\pi}{4}$, *mínimos relativos en* $x = 0$, $x = \frac{3\pi}{4}$ *y* $x = \frac{7\pi}{4}$, *puntos de inflexión en* $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ *y* $x = \frac{3\pi}{2}$. *e) Mínimo relativo en* $x = -\frac{5}{2}$, *puntos de inflexión en* $x = -2$ *y* $x = -1$.

8. Halla los coeficientes a, b, c y d de la función $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que sus extremos locales son (0, 4) y (2, 0).

Sol: $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$, $d = 4$.

9. La función $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene dos extremos locales en los puntos (–1, 20) y (3, –12). Halla a, b, c y d.

Sol: $a = 1$, $b = -3$, $c = -9$, $d = 15$.

10. La función $y = x^3 + mx^2 + nx + p$ pasa por el punto (0, 5), tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 3$. Halla m, n y p.

Sol: $m = -3$, $n = -9$, $p = 5$.

11. La función $y = x^3 + mx^2 + nx + p$ pasa por el punto (–1, 0), tiene un mínimo en $x = 1$ y un punto de inflexión en $x = -\frac{1}{3}$. Calcula m, n y p.

Sol: $m = 1$, $n = -5$, $p = -5$.

12. Calcula la longitud que deben tener los lados de un triángulo isósceles de 24 cm. de perímetro para que el área del triángulo sea máxima.

Sol: todos los lados 8 cm.

13. Calcula la longitud que deben tener los lados de un terreno rectangular de 400 m^2 de área si queremos que el perímetro de su contorno sea el mínimo posible.

Sol: todos los lados 20 m.

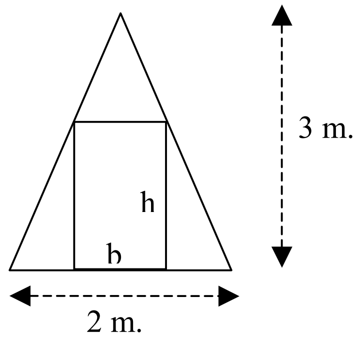
14. Calcula la longitud que deben tener los lados de un terreno rectangular de 400 m^2 de área si queremos que su diagonal sea mínima.

Sol: todos los lados 20 m.

15. Calcula la longitud que deben tener los lados de un rectángulo inscrito en una circunferencia de radio 4 m. para que el área de dicho rectángulo sea máxima.

Sol: todos los lados $4\sqrt{2}$ *m.*

16. Calcula la longitud que deben tener los lados de un rectángulo inscrito en un triángulo isósceles de 3 m. de altura y 2 m. de base (ver figura) para que su área sea máxima.



Sol: $b = 1$ *m,* $h = \dfrac{3}{2}$ *m.*

17. Halla el radio de la base y la altura del cono de generatriz 3 m. y de volumen máximo.

Sol: radio $\sqrt{6}$ *m, altura* $\sqrt{3}$ *m.*

18. De entre todos los conos de volumen igual a 18π m^3, calcula el radio de la base y la altura de aquél cuya generatriz es mínima.

Sol: radio $3\sqrt{2}$ *m, altura 3 m.*

19. Un triángulo rectángulo gira alrededor de uno de sus catetos, engendrando un cono. Sabiendo que la suma de sus catetos es 5 m, halla las dimensiones del triángulo que genera el cono de volumen máximo.

Sol: cateto alrededor del cual gira $\dfrac{5}{3}$ *m, el otro cateto* $\dfrac{10}{3}$ *m, hipotenusa* $\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$ *m.*

20. Un triángulo isósceles de perímetro igual a 3 m. gira alrededor de la altura de su lado desigual, engendrando un cono. ¿Cuánto deben medir la base y la altura del triángulo para que el volumen del cono sea máximo?

Sol: base $\dfrac{6}{5}$ *m, altura* $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$ *m.*

21. Un alambre de 1 m. de longitud se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se construye un cuadrado y con el otro un círculo. Calcula la longitud que ha de tener cada trozo para que la suma de las áreas sea mínima.

Sol: para el cuadrado $\dfrac{4}{4+\pi}$ *m, para el círculo* $\dfrac{\pi}{4+\pi}$ *m.*

22. Un alambre de 1 m. de longitud se divide en dos trozos. Con cada trozo se construye un triángulo equilátero. ¿Qué longitud ha de tener cada trozo para que la suma de las áreas de los triángulos sea mínima?

Sol: ambos $\frac{1}{2}$ *m.*

23. Calcula las dimensiones que debe tener un bote cilíndrico de hojalata cuyo volumen es 8π m^3, si se pretende emplear la menor cantidad posible de hojalata en su fabricación. Considera los siguientes casos:

a) El bote tiene dos tapas.

b) El bote sólo tiene tapa inferior.

Sol: a) radio $\sqrt[3]{4}$ *m, altura* $2\cdot\sqrt[3]{4}$ *m. b) radio 2m, altura 2m.*

24. Calcula el radio de la base del cilindro de volumen máximo inscrito en un cono cuyo radio de la base es 3 cm. y cuya altura es 4 cm. Calcula también dicho volumen.

Sol: radio 2 cm, volumen $\frac{16\pi}{3}$ *cm*^{3}*.*

25. Calcula el radio de la base del cilindro de volumen máximo inscrito en una esfera de 3 cm. de radio. Calcula también dicho volumen.

Sol: radio $\sqrt{6}$ *cm, volumen* $12\cdot\sqrt{3}\cdot\pi$ *cm*^{3}*.*

26. Con una cartulina rectangular de 20 cm. de largo y 12 cm. de ancho se quiere construir una caja, doblando y pegando las caras, para lo cual hay que cortar en los cuatro vértices de la cartulina cuatro cuadraditos de cartón (ver figura). ¿Cuál debe ser la longitud del lado de esos cuadraditos para que la capacidad de la caja sea máxima?

Sol: $\frac{16-2\cdot\sqrt{19}}{3}$ *cm.*

27. Determina en qué punto de la función $y=\frac{1}{x^2+1}$ la tangente a la misma forma un ángulo mayor con el semieje positivo OX.

Sol: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{4}\right)$