

APLICACIONES DE LOS VECTORES:

VECTOR QUE UNE DOS PUNTOS:
$$\left. \begin{array}{l} A(x_0, y_0, z_0) \\ B(x_1, y_1, z_1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

MÓDULO DEL VECTOR (DISTANCIA DE DOS PUNTOS):

$$\left. \begin{array}{l} A(x_0, y_0, z_0) \\ B(x_1, y_1, z_1) \end{array} \right\} \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO AB:
$$\left. \begin{array}{l} A(x_0, y_0, z_0) \\ B(x_1, y_1, z_1) \end{array} \right\} \Rightarrow m_{AB} = \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}, \frac{z_0 + z_1}{2} \right)$$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (u_x, u_y, u_z) \\ \vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$$

PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES:

$$\vec{v} \times \vec{v}' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

VECTOR PERPENDICULAR A OTRO:
$$\vec{d} = (a, b, c) \Rightarrow \vec{d}' = (-b, a, 0)$$

RECTAS:

ECUACIÓN DE LA RECTA EN FORMA VECTORIAL:
$$(x, y, z) = (p_x, p_y, p_z) + \lambda(d_x, d_y, d_z)$$

$P(p_x, p_y, p_z)$ es un punto de la recta

$\vec{d}(d_x, d_y, d_z)$ es un vector en la dirección de la recta

PARAMÉTRICAS:

$$\left. \begin{array}{l} x = p_x + \lambda d_x \\ y = p_y + \lambda d_y \\ z = p_z + \lambda d_z \end{array} \right\}$$

CONTÍNUA:

$$\frac{x - p_x}{d_x} = \frac{y - p_y}{d_y} = \frac{z - p_z}{d_z}$$

ECUACIÓN DE LA RECTA EN FORMA IMPLÍCITA (INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS):

$$\left. \begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{d} = \vec{n} \times \vec{n}' = (a, b, c) \times (a', b', c') = (\det) \\ \text{punto: dando a } x = 0, \text{ calcular } y, z \end{array} \right.$$

El director también obteniendo dos puntos P y P', dando valores dos veces, y haciendo PP'.

PLANOS

ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO: $(x, y, z) = (p_x, p_y, p_z) + \lambda(u_x, u_y, u_z) + \mu(v_x, v_y, v_z)$

$P(p_x, p_y, p_z)$ es un punto del plano

$\vec{u}(u_x, u_y, u_z), \vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ son vectores en el plano, no paralelos entre sí

ECUACIONES PARAMÉTRICAS DEL PLANO:

$$\left. \begin{aligned} x &= p_x + \lambda v_x + \mu u_x \\ y &= p_y + \lambda v_y + \mu u_y \\ z &= p_z + \lambda v_z + \mu u_z \end{aligned} \right\}$$

ECUACIÓN DEL PLANO EN FORMA IMPLÍCITA:

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x & x - p_x \\ u_y & v_y & y - p_y \\ u_z & v_z & z - p_z \end{vmatrix} = 0$$

ECUACIÓN GENERAL DEL PLANO: $ax + by + cz + d = 0$

ECUACIÓN NORMAL DEL PLANO:

$$\left. \begin{aligned} \vec{n} = (a, b, c) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \pi \\ P = (p_x, p_y, p_z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a(x - p_x) + b(y - p_y) + c(z - p_z) = 0$$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES: $\vec{v} \cdot \vec{v}' = (a, b, c) \cdot (a', b', c') = a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c'$

PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES:

$$\vec{v} \times \vec{v}' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO:

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$$P(x_0, y_0, z_0)$$

$$d(\pi, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ANGULO ENTRE DOS RECTAS: (de las rectas conocemos sus directores \vec{d} y \vec{d}')

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{d}'|}{|\vec{d}| |\vec{d}'|}$$

ANGULO ENTRE RECTA Y PLANO: (de la recta conocemos su director \vec{d} , y del plano su normal \vec{n})

$$\text{sen} \alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|}$$

también con el coseno, pero el ángulo sería: 90-ángulo

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS MEDIANTE RANGOS:

$\vec{d}_r(r_1, r_2, r_3)$ es un director de r

$\vec{d}_s(s_1, s_2, s_3)$ es un director de s

$\overline{PP'}(p'_1 - p_1, p'_2 - p_2, p'_3 - p_3)$ vector del punto P de s, a P' de r

$$M = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ p'_1 - p_1 & p'_2 - p_2 & p'_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

$$r(M) = 1 \Rightarrow \begin{cases} r(M') = 1 \Rightarrow \text{COINCIDENTES} \\ r(M') = 2 \Rightarrow \text{PARALELAS} \end{cases}$$

$$r(M) = 2 \Rightarrow \begin{cases} r(M') = 2 \Rightarrow \text{SE CORTAN} \\ r(M') = 3 \Rightarrow \text{SE CRUZAN} \end{cases}$$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS MEDIANTE PUNTOS Y VECTORES:

Si \vec{d}_r y \vec{d}_s son Linealmente dependientes (proporcionales)

podrían ser paralelas o coincidentes

elijo un punto P de r y lo sustituyo en s, si pertenece P a s, serían COINCIDENTES

si no pertenece, PARALELAS.

Si \vec{d}_r y \vec{d}_s NO son Linealmente dependientes (no son proporcionales)

podrían cortarse en un punto o cruzarse

elijo un punto P de r y un P' de s, que determinan un vector $\overline{PP'}$

construyo el determinante:

$$\begin{vmatrix} \vec{d}_r \\ \vec{d}_s \\ \overline{PP'} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{si det} = 0 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ SE CORTAN} \\ \text{si det} \neq 0 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ SE CRUZAN} \end{cases}$$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS MEDIANTE RANGOS:

Los planos expresados mediante su ecuación en forma general:

$$\left. \begin{aligned} \pi &\equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi' &\equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \vec{n}_\pi &= (A, B, C) \\ \vec{n}_{\pi'} &= (A', B', C') \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \\ M' &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r(M) = 1 \Rightarrow \begin{cases} r(M') = 1 \Rightarrow \text{COINCIDENTES} \\ r(M') = 2 \Rightarrow \text{PARALELOS} \end{cases}$$

$$r(M) = 2 \Rightarrow \{ r(M') = 2 \Rightarrow \text{SE CORTAN EN UNA RECTA} \}$$

POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS:

$$\left. \begin{aligned} \pi &\equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi' &\equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ \pi'' &\equiv A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}; M' = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

• Si $R(M) = R(M') = 3$; SE CORTAN EN UN PUNTO

• Si $R(M) = R(M') = n < 3$;

analizarlo teniendo en cuenta la compatibilidad del sistema.

Si $R(M) \neq R(M')$; Sistema incompatible

Determinan una superficie prismática (se cortan dos a dos), paralelos...

POSICIONES RELATIVAS DE RECTA Y PLANO:

De la ecuación del plano, obtenemos un vector normal a él: \vec{n}_π

De la ecuación de la recta, obtenemos su director: \vec{d}_r

• Si \vec{n}_π es perpendicular a \vec{d}_r , es decir $\Rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = 0$

• El plano y la recta son paralelos

Se busca un punto P de la recta y se comprueba que $P \notin \pi$

• La recta está contenida en el plano

Se busca un punto P de la recta y se comprueba que $P \in \pi$

• Si \vec{n}_π no es perpendicular a \vec{d}_r : es decir $\Rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r \neq 0$

• El plano y la recta se cortan en un punto:

Para calcularlo, se resuelve el sistema plano-recta.

El ángulo que determinan plano y recta:

$$\text{sen } \alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|} \Rightarrow \text{también con el coseno, pero el ángulo sería } (90 - \alpha)$$