ECUACIONES Y SISTEMAS: TEORÍA, EJEMPLOS Y EJERCICIOS

Una **ecuación** es una igualdad que contiene números, letras y operaciones, las letras se llaman incógnitas y dicha igualdad es cierta solamente para algunos valores de las letras (incluso a veces para ninguno)

Una **solución de una ecuación** es el número (o números) que , sustituido en el lugar de la incógnita, da el mismo resultado en los dos miembros de la ecuación. Y las **ecuaciones** que tienen la misma solución se llaman **equivalentes**.

Ejemplos:

a) NO SON ECUACIONES : $7\cdot 4+6=34$, x^2-5x+6

SI SON ECUACIONES: $12-2B=8$, $3x+5=x-5$

b) El numero 2 es solución de $5x-2=10-x$, porque si intercambiamos x por 2 queda: $5\cdot 2-2=10-2 \quad \rightarrow \quad 8=8$

El numero 4, no es solución porque al sustituir queda: $5\cdot 4-2=10-4 \quad \rightarrow \quad 18=6 \quad \#$

c) La ecuación $5x-2=10-x$ y $6x=12$, son equivalentes.

2.1 Ecuaciones de primer grado

Una **ecuación de primer grado** con una incógnita, es una ecuación que solo tiene una letra y con exponente 1, la letra que mas se utiliza es la x, pero puede ser otra

2.1.1 Resolución de ecuaciones

Lo haremos con un ejemplo: $2\cdot\dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{x-3}{6}=\dfrac{3\cdot(x-2)}{4}$

1) Es conveniente que no aparezcan productos como el del principio, así que empezaremos efectuándolos aunque solo lo dejaremos indicado, es decir:

$$\frac{2\cdot(2x+1)}{3}-\frac{x-3}{6}=\frac{3\cdot(x-2)}{4}$$

2) Calculamos el m.c.m. de los denominadores y reducimos a común denominador.

$\text{m.c.m.}\{3,6,4\} = 12$ $\qquad$ $\frac{4\cdot 2\cdot(2x+1)}{12} - \frac{2\cdot(x-3)}{12} = \frac{3\cdot 3(x-2)}{12}$

3) Como todos los denominadores son iguales, podemos desecharlos y efectuar las operaciones y los paréntesis: $8\cdot(2x+1) - 2\cdot(x-3) = 9\cdot(x-2)$

$$16x + 8 - 2x + 6 = 9x - 18$$

4) Trasponemos términos y obtenemos el valor de x:

$$16x - 2x - 9x = -18 - 8 - 6$$
$$5x = -32$$
$$x = -\frac{32}{5}$$

2.1.2 Planteamiento y resolución de problemas

La mejor manera de abordar el planteamiento es la siguiente: Se lee el planteamiento, se identifica la incógnita y se escribe de forma algebraica las condiciones y ya por ultimo se resuelve.

Ejemplo 1: Un número aumentado en 256 da 932, ¿qué numero es?

INCÓGNITA: Un numero x

ECUACION: $x + 256 = 932$

RESOLUCION: $x = 932 - 256 = 676$

SOLUCIÓN: El número es 676

Ejemplo 2:La suma de dos números consecutivos es 91. Hállalos

INCÓGNITA: 2 números consecutivos x , $x + 1$

ECUACIÓN: $x + x + 1 = 91$

RESOLUCIÓN: $2x = 90 \quad \Rightarrow \quad x = 45$

SOLUCIÓN: Los números son 45 y 46

Ejemplo 3: Un bolígrafo vale el doble que una goma, y en total son 2€ y 25 cts, ¿cuánto vale cada cosa?

INCÓGNITA: Precio goma: x

Precio bolígrafo: 2x

ECUACIÓN: $2x + x = 2'25$

RESOLUCIÓN: $3x = 2'25 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{2'25}{3} = 0'75$

SOLUCIÓN: Precio goma: 0'75€

Precio bolígrafo: $2 \cdot 0'75 = 1'50$€

Ejemplo 4: Alberto Braulio y Carolina, juntan sus cromos. Alberto aporta trece mas que Braulio y este dos mas que Carolina. ¿cuántos tiene cada uno si en total son 227?

INCÓGNITA: Nº cromos Carolina: x

Nº cromos Braulio. x + 2

Nº cromos Alberto; (x + 2) + 13

ECUACIÓN: $(x+2)+13+x+2+x=227$

RESOLUCION: $x+15+x+2+x=227$

$3x+17=227$

$3x = 227-17 \quad \Rightarrow \quad 3x = 210 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{210}{3} = 70$

SOLUCIÓN: Carolina tiene 70

Braulio 72

Alberto 85

Ejemplo 5: Darío ha pagado 7€ por 5 refrescos y 3 bocadillos. Cada bocadillo vale 1€ mas que un refresco, ¿cuánto vale cada cosa?

INCÓGNITA: Precio refresco: x Precio bocadillo: x + 1

ECUACIÓN: $5x + 3\cdot(x+1) = 7$

RESOLUCIÓN: $5x+3x+3=7$

$8x = 7-3$

$$8x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{8} = 0'50$$

SOLUCIÓN: Precio refresco: 0'50€ Precio bocadillo: 1'50€

Ejemplo 6: Dolores tiene 35 años mas que su hija Elena y dentro de 15 años la edad de la madres será justo el doble que la de la hija, ¿qué edad tienen ahora?

INCÓGNITAS:

	AHORA	DENTRO DE 15 AÑOS
EDAD HIJA	X	x+15
EDAD MADRE	x+35	x+35+15

ECUACIÓN:

$x + 35 + 15 = 2 \cdot (x + 15)$

RESOLUCIÓN: $x + 50 = 2x + 30$

$x - 2x = 30 - 50 \quad \Rightarrow \quad -x = -20 \quad \Rightarrow \quad x = 20$

SOLUCIÓN: Elena tiene 20 años y su madre 55

Ejemplo 7: Repartir 525€ de forma proporcional a las edades de tres hermanos, que son 8 12 y 15.

INCÓGNITAS: Al pequeño le toca 8x

Al mediano le toca 12x

Al mayor le toca 15x

ECUACIÓN: $8x + 12x + 15x = 525$

RESOLUCIÓN: $35x = 525$

$$x = \frac{525}{35} = 15$$

SOLUCIÓN: Al pequeño le toca 15 · 8 = 120€

Al mediano le toca 15 · 12 = 185€

Al mayor le toca 15 · 15 = 225€

Ejemplo 8: Un grifo tarda 3 horas en llenar un depósito y otra tarda 2 horas en llenarlo, ¿cuánto tardaran en llenar el deposito los dos grifos a la vez?

INCÓGNITA: Tiempo que tardan los 2 a la vez x

En una hora, se llena $\frac{1}{x}$

ECUACIÓN: En una hora, el primer grifo llena $\frac{1}{3}$ y el segundo $\frac{1}{2}$

Los dos juntos, en una hora llenan $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$

La ecuación entonces es: $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{x}$

RESOLUCIÓN: $\frac{2x+3x}{6x}=\frac{6}{6x}$

$5x=6 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{6}{5}=1'2 \quad \rightarrow$ 1 hora y 12 minutos

SOLUCIÓN: Los dos juntos tardan 1 hora y 12 minutos.

Ejemplo 9: Una persona realiza $\frac{3}{5}$ partes de un viaje en tren, los $\frac{7}{8}$ del resto en coche y los 26 km. Que faltan en moto, ¿cuántos kilómetros recorre en total?

INCÓGNITA: kilómetros totales x

ECUACIÓN: $\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}x\cdot\frac{7}{8}+26=x$

RESOLUCIÓN: $\frac{3x}{5}+\frac{14x}{40}+26=x$

$$\frac{24x+14x+1040}{40}=\frac{40x}{40}$$

$$38x+1040=40x$$

$$38x-40x=-1040 \quad \Rightarrow \quad -2x=-1040$$

$$x=\frac{-1040}{-2}=520$$

SOLUCIÓN: El trayecto es de 520 km.

2.2 Ecuaciones de segundo grado

Una **ecuación** con una incógnita es de **segundo grado** si el mayor exponente con que figura la incógnita es 2 y pueden expresarse en la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c representan números y $a \neq 0$.

Las ecuaciones de segundo grado pueden ser:

Completas: Si todos (a, b y c) son diferentes de cero

Incompletas: Si alguno/s (salvo a) valen vero.

2.1.1. Resolución de ecuaciones

El método a seguir depende de si se trata de completas o incompletas y dentro de este caso, del tipo que sean

Resolución de incompletas:

Tipo 1: La ecuación no tiene termino en x, (b = 0). Ejemplo: $3x^2 - 12 = 0$

Se despeja la incógnita directamente:

$$3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \quad 3x^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Tipo 2: La ecuación no tiene término independiente (c = 0). Ejemplo: $3x^2 - 12x = 0$

Se extrae x como factor común:

$$3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x \cdot (3x + 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{-12}{3} = -4 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

Tipo 3: Si solamente tiene termino en x^2. Ejemplo: $7x^2 = 0$

Su única solución es x = 0.

Resolución de completas

Se utiliza la formula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Ejemplo: Resolver $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4{\cdot}2{\cdot}(-3)}}{2{\cdot}2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3 \\ \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

2.2.2 Planteamiento y resolución de problemas

Seguiremos un esquema igual que para las de primer grado, en primer lugar se lee atentamente el enunciado, luego se identifica la incógnita, se relee el enunciado y se plantea la ecuación, Después se resuelve y por ultimo se interpreta los resultados

Ejemplo 1: El doble del cuadrado de un numero distinto de cero es igual a seis veces el numero, ¿qué número es?

INCÓGNITA: Un numero x

ECUACIÓN: el doble del cuadrado $2x^2$

Seis veces el numero $6x$

$$2x^2 = 6x$$

RESOLUCIÓN: $2x^2 - 6x = 0 \;\Rightarrow\; x \cdot (2x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{0} = 3 \end{cases}$

SOLUCIÓN: El numero es x = 3, porque el enunciado dice diferente de cero.

Ejemplo 2: Dos números se diferencian en tres unidades y el producto de ambos es 279. Calcula dichos números.

INCÓGNITA: DOS NÚMEROS: x x+3

ECUACIÓN: $x \cdot (x+3) = 270$

RESOLUCIÓN: $x^2 + 3x = 270 \;\Rightarrow\; x^2 + 3x - 270 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4{\cdot}1{\cdot}(-270)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+1080}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1089}}{2} = \frac{-3 \pm 33}{2} = \begin{cases} x = \frac{30}{2} = 15 \\ x = \frac{-36}{21} = -18 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: El problema tiene dos soluciones posibles:

Si x = 15, entonces los números son 15 y 18

Si x = -18, entonces los números son -18 y -15.

Ejemplo 3: El área de una parcela rectangular es de 9800 metros cuadrados. Caula sus lados si se sabe que uno mide el doble que el otro.

INCÓGNITA: Lados del rectángulo x y $2x$

ECUACIÓN: $x \cdot 2x = 9800$

RESOLUCIÓN: $2x^2 = 9800 \Rightarrow \quad x^2 = \frac{9800}{2} = 4900$

$x = \sqrt{4900} = \pm 70$

SOLUCIÓN: El valor de x que nos sirve es 70 porque un lado nunca podrá ser negativo, así que un lado mide 70 y el otro 140.

2.3 Sistema de ecuaciones

Un **sistema de dos ecuaciones** de primer grado con dos incógnitas consta de dos ecuaciones en las que las incógnitas representan los mismos valores, y se escriben así:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + fy = g \end{array}\right\}$$

Una **solución de un sistema** es un par de valores, uno para la incógnita x y otro para la incógnita y que hacen ciertas las dos ecuaciones simultáneamente y **resolver un sistema** es hallar sus soluciones.

Ejemplos: $\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{array}\right\}$ Es un sistema de ecuaciones y los valores x = 3, y= 2 es una solución del sistema ya que si sustituimos estos valores en el sistema nos queda:

$\left.\begin{array}{l} 3 + 2 = 5 \\ 2 \cdot 3 - 2 = 6 - 2 = 4 \end{array}\right\}$ es decir obtenemos igualdades ciertas.

2.3.1. Resolución de sistemas

Hay muchas formas de resolver un sistema, todas ellas igual de válidas, en este curso vamos a estudiar tres métodos:

Método de sustitución: Consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituir la expresión resultante en la otra ecuación.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l}3x-4y=-6\\2x+4y=16\end{array}\right\}$

Primero despejamos una de las incógnitas, la que queramos, en la ecuación que queramos; por ejemplo despejamos x de la primera ecuación

$3x = 4y - 6 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{4y-6}{3}$

Ahora sustituimos este valor en la otra ecuación:

$2\cdot\dfrac{4y-6}{3} + 4y = 16$ y resolvemos donde la incógnita es y

$\dfrac{2(4y-6)+12y}{3} = \dfrac{48}{3} \quad \Rightarrow \quad 8y-12+12y=48 \quad \Rightarrow \quad 8y+12y=12+48$

$20y = 60 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{60}{20} = 3$

Y ahora sustituimos este valor obtenido en x $\quad x = \dfrac{4\cdot 3-6}{3} = 2$

La solución del sistema es x = 2 y y = 3.

<u>Método de igualación</u>: Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones y después igualar lo obtenido.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l}3x-4y=-6\\2x+4y=16\end{array}\right\}$

Vamos a despejar la incógnita x en las dos ecuaciones

En la primera ecuación queda: $3x = 4y - 6 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{4y-6}{3}$

En la segunda: $2x = 16 - 4y \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{16-4y}{2}$

Ahora igualamos las dos expresiones : $\dfrac{4y-6}{3} = \dfrac{16-4y}{2}$

La ecuación resultante la resolveremos teniendo en cuenta que la incógnita es y

m.c.m. = 6 $\Rightarrow \quad \dfrac{2\cdot(4x-6)}{6} = \dfrac{3\cdot(16-4y)}{6} \quad \Rightarrow \quad 8y-12 = 48-12y$

$8y+12y = 48+12 \quad \Rightarrow \quad 20y = 60 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{60}{20} = 3$. Ahora se sustituye este valor en cualquiera de las relaciones anteriores, por ejemplo en la segunda

$$x = \frac{16-4\cdot 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

La solución es x = 2, y = 3.

Método de reducción: El método cosiste en sumar o restar las ecuaciones de modo que eliminemos una de las incógnitas, para ello previamente podemos multiplicar por algún número las ecuaciones.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 3x-4y=-6 \\ 2x+4y=16 \end{array}\right\}$

Vamos a intentar sumar las ecuaciones para eliminar la incógnita "x" para ello, los coeficientes deben ser iguales pero de signo contrario. Multiplicamos la primera ecuación por 2 y la segunda por -3 y obtenemos el siguiente sistema:

$\left.\begin{array}{r} 2\cdot(3x-4y)=2\cdot(-6) \\ -3\cdot(2x+4y)=-3\cdot(16) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 6x-8y=-12 \\ -6x-12y=-48 \end{array}\right\}$ Si sumamos ahora nos queda lo siguiente: $\begin{array}{r} 6x-8y=-12 \\ -6x-12y=-48 \\ \hline -20y=-60 \end{array}$ despejamos $y=\frac{-60}{-20}=3$

Para calcular x podemos proceder de dos maneras diferentes, o bien hacemos algo parecido a lo del principio pero ahora intentando eliminar la incógnita "y" o bien podemos despejarla en alguna de las ecuaciones y sustituir el valor obtenido aquí. Vamos a hacerlo de la segunda manera, si despejamos x en la primera ecuación queda:

$x=\frac{4y-6}{3}=\frac{4\cdot 3-6}{3}=\frac{6}{3}=2$. Así la solución es x = 2, y = 3.

2.3.2 Planteamiento y resolución de problemas

Seguiremos un esquema igual que para las de primer grado, en primer lugar se lee atentamente el enunciado, luego se identifica la incógnita, se relee el enunciado y se plantea la ecuación, Después se resuelve y por ultimo se interpreta los resultados

Ejemplo 1: Halla dos números cuya suma sea 14 y su diferencia 8.

INCÓGNITAS: Dos números x e y

ECUACIÓN: $\left.\begin{array}{l} x+y=14 \\ x-y=8 \end{array}\right\}$

RESOLUCIÓN: El método mas sencillo es el de reducción ya que si sumamos las ecuaciones enseguida se elimina una incógnita.

$$\begin{array}{l} x+y=14 \\ \underline{x-y=8} \\ 2x \quad =22 \end{array} \qquad x=\frac{22}{2}=11$$

. Para obtener y despejamos en la primera ecuación $y=14-x=14-11=3$

SOLUCIÓN: Los números son 11 y 3.

Ejemplo 2: Nueve entradas de cine y 5 refrescos cuestan 87€, mientras que 5 entradas y 9 refrescos cuestan 67€. ¿Cuánto cuestas cada entrada y cada refresco?

INCÓGNITAS: Precio de la entrada del cine: x

Precio del refresco: y

ECUACIÓN: $\left.\begin{array}{l} 9x+5y=87 \\ 5x+9y=67 \end{array}\right\}$

RESOLUCIÓN: Vamos a utilizar el método de igualación, para ello despejaremos la incógnita "y" en las dos ecuaciones

En la primera queda: $y=\frac{87-9x}{5}$

Y en la segunda: $y=\frac{67-5x}{9}$

Igualamos y se obtiene: $\frac{87-9x}{5}=\frac{67-5x}{9}$

Reducimos al mismo denominador: $\frac{9\cdot(87-9x)}{45}=\frac{5\cdot(67-5x)}{45}$

Y, por último, resolvemos la ecuación resultante:

$783-81x=335-25x \quad \Rightarrow \quad 25x-81x=335-783$

$-56x=-448 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-448}{-56}=8$

Sustituimos en alguna de las relaciones donde esta la incógnita "y" despejada para obtener su valor:

$$y=\frac{87-9x}{5}=\frac{87-9\cdot8}{5}=\frac{87-72}{5}=3$$

SOLUCIÓN: El cine cuesta 8€ y cada refresco 3€.

2.4 Ecuaciones reducibles a las de segundo grado

2.4.1 Ecuaciones Bicuadradas

Son aquellas que son de cuarto grado, pero no tienen ni el término x^3 ni en x; es decir, tiene la forma: $ax^4+bx^2+c=0$.

Para resolverlas se puede considerar que $z=x^2$, y por lo tanto que $z^2=x^4$, y así, la ecuación anterior se queda: $az^2+bz+c=0$; es decir una ecuación de segundo grado donde ahora la incógnita es z.

Ejemplo 1: $x^4-13x^2+36=0$.

En primer lugar cambiamos la variable haciendo $z=x^2$, $z^2=x^4$, la ecuación queda:

$z^2-13z+36=0$, utilizamos la formula de las ecuaciones completas de segunda grado y nos queda:

$$z=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{2}=\frac{13\pm5}{2}=\left\langle\begin{array}{l} z_1=\frac{13+5}{2}=9\Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm3 \\ z_2=\frac{13-5}{2}=4\Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm2\end{array}\right.$$

Es decir, tenemos 4 soluciones -3, 3, -2 y 2.

2.4.2 Ecuaciones Radicales

Son aquellas en las que la incógnita está en el radicando. Por ejemplo la ecuación $\sqrt{x}+2=x$

Es una ecuación radical y no lo es: $x+\sqrt{2}=2x$

Vamos a resolver : $\sqrt{x}+2=x$.

1.- **Aislamos la raíz**. Esto significa que en primer lugar, siempre y en todos los casos, hay que realizar los cambios necesarios en la ecuación de tal modo que la raíz cuadrada se quede en uno de los dos miembros de la ecuación y TODO LO DEMAS en el otro miembro. En este caso, pasamos el 2 al segundo miembro y nos queda:

$$\sqrt{x}=x-2$$

2.- **Elevamos al cuadrado**. Esto se hace para poder eliminar la raíz. Hay que tener mucho cuidado porque en la mayoría de los casos hay que desarrollar una igualdad notable. En este caso sería:

$\left(\sqrt{x}\right)^2 = (x-2)^2$ Desarrollamos ahora y queda:

$x = x^2 - 2\cdot x\cdot 2 + 2^2$

$x = x^2 - 4x + 4$

3.- **Resolvemos la ecuación resultante**. Es decir, ahora nos encontramos, frecuentemente, con una ecuación de segundo grado que tenemos que resolver por los métodos tradicionales. En este caso, debemos pasar todo al primer miembro para darnos cuenta mejor de lo que hay que hacer. Nos queda así:

$x - x^2 + 4x - 4 = 0$ Y si simplificamos:

$-x^2 + 5x - 4 = 0$. Resolvemos directamente esta ecuación

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{-2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-5 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-5+3}{-2} = \dfrac{-2}{-2} = 1 \\ \dfrac{-5-3}{-2} = \dfrac{-8}{-2} = 4 \end{cases}$$

4.- **Comprobación de las soluciones**. En algunos casos, este método nos aporta soluciones que en realidad no lo se, las llamamos soluciones falsas, por eso tenemos siempre que comprobarlas. Para ello sustituiremos los valores obtenidos como solución en la ecuación del enunciado a ver si son verdaderas o falsas.

- Para x = 1, sustituido en la ecuación $\sqrt{x} + 2 = x$, quedaría

$$\sqrt{1} + 2 = 1$$

$$1 + 2 = 1 \qquad \#$$

Evidentemente es una solución falsa, probemos ahora con la otra

- Para x = 4, sustituido en la ecuación $\sqrt{x} + 2 = x$, quedaría

$$\sqrt{4} + 2 = 4$$

$$2 + 2 = 4$$

Esta si es la verdadera solución; es decir la solución del ejercicio es x = 4